Densità ipergeometrica

$\binom{n}{m}$ $0 \le m \le n$

$a \in \mathbb{N}$ $a \ge 1$

$b \in \mathbb{N}$ $b \ge 1$

$n \in \mathbb{N}$ $n \ge 1$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \le k \le a \\ 0 \le n-k \le b \end{array}\right\} (*)$$

$$\boxed{0 \le n \le a+b}$$

$$\boxed{f(k) = \frac{\binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}}$$

se valgono $(*)$

$$\boxed{\begin{array}{l} n-b \le k \le n \\ 0 \le k \le a \end{array}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{f(k)} = 1$$

Una popolazione è composta da a oggetti di tipo 1 e
b oggetti di tipo 2

Si eseguono n estrazioni senza rimpiazzo dalla popolazione di $a+b$ oggetti. Sia

X = n° di oggetti di tipo 1 estratti

$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Omega = \{$ combinazioni di $a+b$ oggetti a n alla volta $\}$

$\text{card}\,\Omega = \binom{a+b}{n}$ $\qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{card}\,A}{\binom{a+b}{n}}$$

$$P(X=k) = \frac{\operatorname{card}(\{X=k\})}{\binom{a+b}{n}}$$

$$\{X=k\} = \{\omega \in \Omega : \text{il numero di oggetti di tipo 1 presenti nel gruppo } \omega \text{ è pari a } k\}$$

$$\text{card}(X=k) = \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k}$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$$

Densità geometrica di par. $p \in (0,1)$

Si esegue una successione di lanci di una moneta che dà "testa" con probabilità p arrestandosi al primo lancio in cui si ottiene "testa".

Sia X = n° di lanci necessari fino al 1° lancio in cui esce "testa"

$X(\omega_2) = 2$

$X(\omega_4) = 4$

$X(\delta) = +\infty$

$$\Omega = \{(1), (0,1), (0,0,1), (0001), \ldots\ldots\ldots\ldots (0,0,0\ldots\ldots\ldots)\}$$

$$= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots\ldots \delta\}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

$$\{\delta\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_k\} \right)^c$$

$$P(\{\delta\}) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_k\} \right)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(\{\omega_k\}) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

Serie geometr.

$$= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p\,(1-p)^{k-1} =$$

$$= 1 - p \sum_{h=0}^{\infty} \underbrace{(1-p)}_{=x}{}^{h} =$$

$$= 1 - p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 0$$

$$\boxed{P(\underline{\{\delta\}}) = 0}$$

quasi impossibile

P

Paradosso della scimmia

Paradosso di <u>Borel</u>

$$P(\{\omega_k\}) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$P(\{\omega_1\}) = p$$

$$\omega_3 = (0, 0, 1)$$

$$P(\{\omega_2\}) = (1-p)\,p \Leftarrow p^{\sum \omega_i}(1-p)^{3-\sum \omega_i}$$

$$P(\{\omega_3\}) = (1-p)^2 p^1 \Leftarrow$$

Densità di Poisson $\lambda > 0$
parametro

$$f(k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & k = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$P(X=k)$$

$$P(X=\infty) = P(\{\delta\}) = 0$$

$$= P(\{\omega_k\}) = p\,(1-p)^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

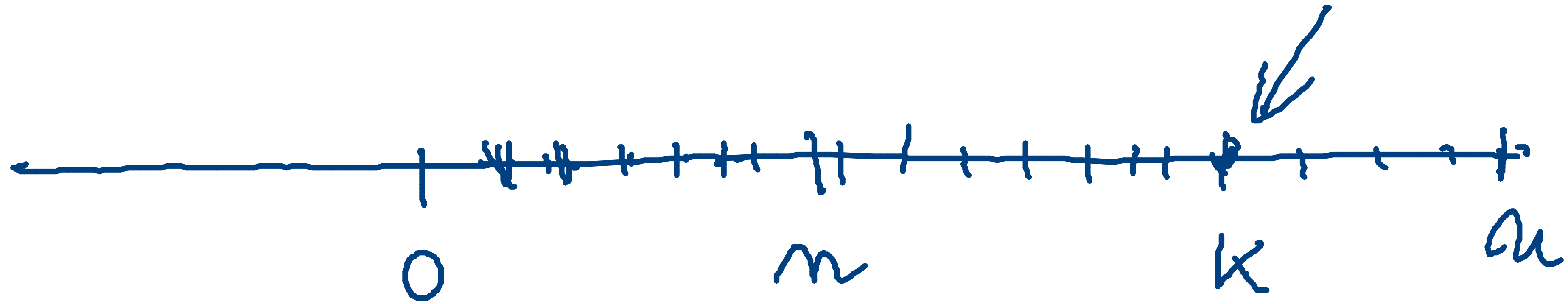
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$X \sim \Pi_\lambda$

Sia $X_n \sim B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ $\lambda > 0$

Sia $k \in \mathbb{N}$. Vogliamo vedere che

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$



X_n prende i valori

$0, 1, 2, \ldots, n$

$P(X_n = k) = 0$ per $n < k$

Per $n \geq k$

$X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$

$X_n = B(n, \frac{\lambda}{n^2})$

$X =$ n° di auto che passano al casello di Pisa nord dalle h 13 alle h 14 del 14 ottobre 2013

$X \sim \Pi_\lambda$

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}_{}$$

$$\binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{m^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{\lambda^k}{m^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{m}\right)^{-k} =$$

$$= \boxed{\frac{\lambda^k}{k!}}\;\underbrace{\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n}{n^k}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$\underbrace{\frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{(n-k+2)}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n}}_{k \text{ fattori}}$$

$$\lim_{n} \frac{n-k+1}{n}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda}$$

$$f(k) = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$k = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\ldots$$

$$f(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1, 2, 3 \ldots\ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si eseguono n estrazioni
con rimpiazzo da un'urna
contenente a palline rosse (= ogg. di tipo 1)
e b palline nere (= ogg. di tipo 2)

X = n° di palline ~~rosse~~ estratte

$X \sim B\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ "successo" = estraz. di p rossa